TEOREMA DE LA IMPOSIBILIDAD DE ARROW

Definición

Arrow (1963): "Cualquier regla de votación que respete el axioma de transitividad, el de independencia de alternativas irrelevantes y el de unanimidad es una dictadura, en tanto en cuanto la decisión se plantee, al menos, respecto de tres alternativas".

Axiomas

Antes de pasar a demostrar este resultado, definimos cada uno de los axiomas considerados por Arrow:

- *Transitividad*: si la alternativa A es preferida a la alternativa B, y la alternativa B es preferida a C, A debe ser preferida a C. Analíticamente,

  $$\left.\begin{matrix} A \succ B \\ B \succ C \end{matrix}\right\} A \succ C$$

  donde el símbolo $\succ$ denota "(estrictamente) preferido a".

- *Unanimidad*: el colectivo (o sociedad) prefiere A a B en la medida en que cada individuo prefiera A a B.

- *Independencia de alternativas irrelevantes*: añadir o considerar nuevas alternativas a las ya existente, por ejemplo, A, B y C, no debe variar la ordenación entre esas tres.

- *Dictadura*: el individuo *i* es un dictador si siempre que éste prefiera, por ejemplo, A a B, la sociedad prefiere A a B.

Demostración

La demostración constará de varios pasos. Brevemente, ésta consistirá en identificar, entre 6 votantes (V1, V2, V3, V4, V5 y V6), a uno de ellos como decisivo en el sentido de que su ordenación de preferencias (entre 5 alternativas, A, B, C, D y E) determina la ordenación de preferencias social, respetando el resto de axiomas. Por tanto, a partir de esta demostración, se concluirá que, efectivamente, el resto de axiomas sólo se puede cumplir de forma simultánea en la medida en que exista un dictador.

Tal demostración se basa en

Geanakoplos, J. (1996): "Three Brief Proofs of Arrow's Impossibility Theorem", mimeo.

Paso 1: Si todos los votantes sitúan a una alternativa en última o primera posición de su ordenación de preferencias, esa alternativa debe ser socialmente valorada en primera o última posición (incluso si la mitad del electorado sitúa a esa alternativa en la primera posición y la otra mitad la sitúa en la última posición).

Mediante un ejemplo, se puede entender este resultado. Supongamos la siguiente ordenación de preferencias:

V1	V2	V3	V4	V5	V6
B	B	B	B	C	A
C	D	A	D	E	D
A	E	C	C	A	E
E	A	D	A	D	C
D	C	E	E	B	B

La alternativa B se sitúa en la primera posición para los cuatro primeros votantes, y en la última para el resto. Ello implica que, socialmente, también se situará en la primera o última posición de la ordenación (para este primer paso, no necesitamos saber más). Supongamos que no fuera así y, por ejemplo, $A \succ B$ y $B \succ C$. De acuerdo con el axioma de independencia de alternativas irrelevantes, ese resultado debe ser independiente de si cambia la ordenación entre A y C. Veamos el siguiente cuadro:

V1	V2	V3	V4	V5	V6
B	B	B	B	**C**	**C**
C	D	**C**	D	E	D
A	E	**A**	**C**	**A**	E
E	**C**	D	**A**	D	**A**
D	**A**	E	E	B	B

Sin embargo, obsérvese que ahora, por unanimidad, $C \succ A$, lo cual viola la propiedad transitiva. Por tanto, se demuestra que no puede darse una situación en que $A \succ B$ y $B \succ C$, es decir, una situación en que B no se sitúe en primer o en último lugar de la ordenación social de preferencias. En otro caso, violaría el axioma de transitividad.

Paso 2: Existe un votante pivote o decisivo (votante *i*), en el sentido de que un cambio en su ordenación de preferencias da lugar a que, siguiendo con nuestro ejemplo, la alternativa B pase a ser de la más (menos) preferida a la menos (más). Dado que ese hecho depende de cómo valore la alternativa B, *i*=*i*(B).

Cuadro 1

V1	V2	V3	**V4**	V5	V6
B	B	B	E	C	C
C	D	C	D	E	D
A	E	A	C	A	E
E	C	D	A	D	A
D	A	E	B	B	B

Supongamos que todos los votantes sitúan la alternativa B en la última posición de la ordenación. Por unanimidad, esta alternativa sería la menos preferida sobre el resto. Si sucesivamente todos pasar a priorizar ésta sobre el resto, la alternativa B pasará a ser la más preferida. El cuadro anterior recoge aquella situación justo antes de que el V4 cambie su ordenación de preferencias, lo cual queda recogido en el siguiente cuadro

Cuadro 2

V1	V2	V3	**V4**	V5	V6
B	B	B	B	C	C
C	D	C	E	E	D
A	E	A	D	A	E
E	C	D	C	D	A
D	A	E	A	B	B

V4 es decisivo pues su cambio de preferencias ha provocado que ahora B se sitúe en la primera posición de la ordenación.

<u>Paso 3</u>: finalmente, y éste es el aspecto clave de la demostración, demostraremos que, de hecho, V4 es un dictador.

A partir de la última tabla, construimos una nueva donde, para V4, $A \succ B \succ C$, es decir, B no es una opción "extrema" para este votante.

Cuadro 3

V1	V2	V3	V4	V5	V6
B	B	B	A	C	C
C	D	C	B	E	D
A	E	A	E	A	E
E	C	D	D	D	A
D	A	E	C	B	B

Fijémonos que, en esta situación, debe ser $A \succ B$, puesto que respecto del Cuadro 1 en que B era la alternativa situada en última posición, y teniendo en cuenta el axioma de independencia de alternativas irrelevantes, para todos los individuos se ha mantenido el que A es preferido a B.

Siguiendo con el mismo razonamiento, es posible demostrar que $B \succ C$. Fijémonos que respecto del Cuadro 2 en que B era la alternativa preferida, nada ha cambiado para todos los individuos respecto de la comparación entre B y C.

A partir de estos resultados, y utilizando la propiedad transitiva, socialmente, A es preferida a C... en la medida en que V4 prefiera A a C (es el elector que ha cambiado su ordenación de preferencias)... mientras que todo el resto prefiere C a A!!!

Sin embargo, todavía no hemos demostrado totalmente que V4 es un dictador. Para ello, sería necesario que su "poder" también se extendiera a otro par de alternativas, por ejemplo, AB. Para ello, supongamos que todos, excepto V4, sitúan la alternativa C en la primera posición de su ordenación (ahora, en lugar de B). Ahora, i=i(C). Obsérvese la similitud con el Cuadro 3.

Cuadro 4

V1	V2	V3	V4	V5	V6
C	C	C	A	C	C
B	B	B	B	A	A
A	D	A	E	E	D
E	E	D	C	D	E
D	A	E	D	B	B

A partir de aquí, establezcamos una ordenación en que aquellos votantes que prefieran B a A sitúen a B en primer lugar, y a la inversa. En la medida en que V4 prefiera A a B, la ordenación social será tal que B se sitúe en la última posición del ránking. Lo contrario sucedería si V4 situara en primer lugar a la alternativa B. En definitiva, se confirma que V4 es un dictador, pues la ordenación social entre A y B depende de su ordenación entre A y B.

Cuadro 5

V1	V2	V3	V4	V5	V6
B	B	B	A	A	A
C	C	C	E	C	C
A	D	A	D	E	D
E	E	D	C	D	E
D	A	E	B	B	B